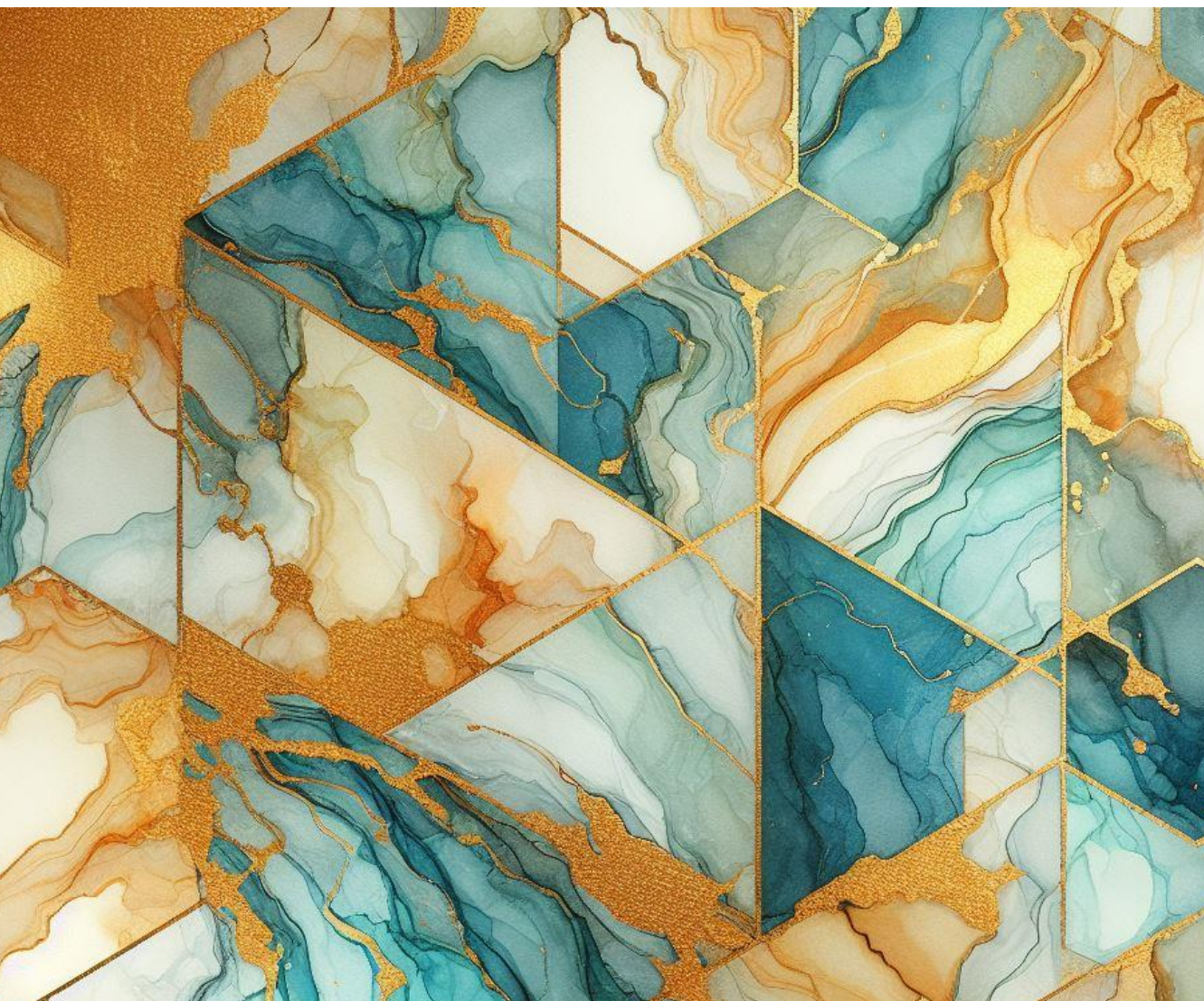


Соња Манчевска

GEOGEBRA

ПРАКТИКУМ ПО МАТЕМАТИКА 1



Битола, 2024



УНИВЕРЗИТЕТ
„СВ. КЛИМЕНТ ОХРИДСКИ“ - БИТОЛА

ФАКУЛТЕТ ЗА ИНФОРМАТИЧКИ И
КОМУНИКАЦИСКИ ТЕХНОЛОГИИ - БИТОЛА



д-р Соња Манчевска

GeoGebra – Практикум по Математика 1

Битола, 2024

Автор:

Вонр. проф. д-р Соња Манчевска

Рецензенти:

Ред. проф. д-р Александар Крстев

Факултет за информатика, Универзитет „Гоце Делчев“ – Штип, Р. Северна Македонија

Вонр. проф. д-р Елена Карамазова Гелова

Факултет за информатика, Универзитет „Гоце Делчев“ – Штип, Р. Северна Македонија

Битола, 2024

Издавач:

Факултет за информатички и комуникациски технологии – Битола

Универзитет „Св. Климент Охридски“ – Битола, Р. Северна Македонија

Одговорен уредник:

Ред. проф. д-р Благој Ристевски, декан

Уредник:

Вонр. проф. д-р Соња Манчевска

Одобрено како учебно помагало од Наставно научниот совет на Факултетот за информатички и комуникациски технологии – Битола, Универзитет „Св. Климент Охридски“ – Битола, Р. Северна Македонија, со одлука бр. 02-30/14 од 24.01.2024 г.

CIP - Каталогизација во публикација

Национална и универзитетска библиотека "Св. Климент Охридски", Скопје

004.455:51(075.8)(076)

МАНЧЕВСКА, Соња

GeoGebra [Електронски извор] : практикум по Математика 1 / Соња Манчевска. - Битола : Универзитет "Св. Климент Охридски" – Битола, Факултет за информатички и комуникациски технологии - Битола, 2024

Начин на пристапување (URL):

<https://fikt.uklo.edu.mk/za-fikt/izdavacka-dejnost/>. - Текст во PDF

формат, содржи 280 стр., илустр. - Наслов преземен од екранот. - Опис на изворот на ден 12.02.2024. - Библиографија: стр. 278-279

ISBN 978-608-5003-04-4

а) Геогембра (програмски пакет) -- Математика -- Високошколски учебници
-- Вежби

COBISS.MK-ID 62943749

Ниту еден дел од оваа публикација не смее да биде репродуциран на кој било начин без претходна согласност од авторот.

Предговор

Учебното помагало „GeoGebra – Практикум по Математика 1“ првенствено е наменето за студентите на прв циклус студии на Факултетот за информатички и комуникациски технологии – Битола. Практикумот опфаќа дел од начините на кои GeoGebra може да се користи за решавање математички проблеми, визуализација на одделни математички објекти, анализа на нивните својства и правилно усвојување на напредни математички концепти од матрици, системи линеарни равенки, реални функции, криви во рамнина и диференцијалното сметање за функции од една реална променлива, што се составен дел од наставните содржини по предметот Математика 1. Практикумот може да го користат и студенти од други факултети и ученици од средните училишта на кои се изучуваат математички предмети што вклучуваат некоја од наведените математички области.

Материјалите во Практикумот, без предговорот, содржината и литературата, се изложени во шест глави, 1. Вовед во GeoGebra, 2. Матрици, 3. Системи линеарни равенки, 4. Реални функции, 5. Криви во рамнина, 6. Изводи и еден Додаток.

Првата глава содржи основни информации за GeoGebra, изборот на верзијата, пристапот до датотеките за инсталација и оние за користење на GeoGebra како пренослива апликација, преглед на поважните карактеристики на корисничкиот интерфејс, начинот на кој функционираат неговите одделни компоненти и неколку општи напомени во врска со објектите со кои се работи во GeoGebra. На крајот се посочени поважните извори на дополнителни ресурси и неколку општи напомени за користење на другите содржини на практикумот.

Во втората глава е опфатено работењето со матрици во GeoGebra. Наведени се начините на дефинирање матрици, изведувањето на основните операции со матрици и користењето на вградените наредби во GeoGebra наменети за определување транспонирана матрица, инверзна матрица, ранг на матрица, редуцирана редично скалеста форма на матрица, сопствени вредности, сопствени вектори и Жорданова канонична форма.

Во третата глава се опфатени начините на кои GeoGebra може да се искористи за решавање на системи линеарни равенки. Покрај вградените наредби што овозможуваат брзо определување на решенијата на даден систем линеарни равенки, илустриран е начинот кај кој проширената матрица на системот се трансформира во матрица од која може да се утврди решливоста на системот и, во случај кога системот има решение, како тоа да се отчита од трансформираната матрица. Покрај дел од општите алгебарски методи, за системи од две линеарни равенки со две непознати и системи од три линеарни равенки со три непознати е опфатен и графичкиот метод за нивно решавање.

Во четвртата глава е опфатено работењето со реални функции во GeoGebra. На почетокот посебен акцент е ставен на начините на кои реалните функции се дефинираат како GeoGebra објекти во зависност од тоа дали тие се зададени со еден аналитички израз, табеларно или се дефинирани по делови и, преку соодветни вежби, е илустрирано автоматско исцртувањето на графици за одделните видови функции. Потоа се илустрирани начините на кои со помош на GeoGebra може графички да се претстават дефиниционите области, областите на менување на функциите, да се изведуваат операции со функции, да се определуваат аналитички изрази за композиции на функции и инверзни функции и е наведен еден од начините на анимирање на графици на функции. Во другиот дел од оваа глава акцентот е ставен на GeoGebra наредбите наменети за определување нули на функции, локални екстреми, превојни точки, наредбите наменети за специфични класи на реални функции, наредбите за определување еднострани и двострани граници на функции, наредбата за детектирање на отстранливите прекини и наредбата за определување асимптоти.

Во петтата глава се опфатени начините на исцртување криви во рамнина со помош на GeoGebra. Одделно се разгледани случаите кога кривите се опишани со имплицитно зададени функции, параметарски равенки или поларни равенки во експлицитен и имплицитен облик.

Во шестата глава е опфатено диференцијалното сметање на функции од една реална променлива и дел од неговата примена што може да се изведе или да се илустрира со помош на GeoGebra. Детално се опишани можностите на GeoGebra за определување на изводи од прв ред од експлицитно и имплицитно зададени функции, параметарски зададени функции, како и определување изводи од повисок ред на експлицитно зададени функции и функции зададени со параметарски равенки. Кај примена на диференцијалното сметање се опфатени можностите на GeoGebra за определување на Тејлорови и Маклоренови полиноми, равенки на тангента и нормала и примената на изводите при определувањето на локалните екстреми, интервалите на монотоност, превојните точки и интервалите на закривеност.

По шестата глава е вклучен Додаток, кој содржи три табели во кои се наведени симболите што се користат во GeoGebra за основните математички операции, Буловите операции и релации, ознаките за поважните вградени математички функции и кратенки за внес преку тастатура на одделни математички константи, грчки букви и симболи.

*Од авторот
д-р Соња Манчевска*

Содржина

1. Вовед во GeoGebra	1
1.1. Што е GeoGebra?	1
1.2. GeoGebra апликации	1
1.3. Инсталација на GeoGebra Classic 5	2
1.4. Корисничкиот интерфејс на GeoGebra Classic 5	3
1.4.1. Главно мени	4
1.4.2. Лента со алатки	7
1.4.3. Лента за внес (Input)	8
1.4.4. Контекстно мени	9
1.4.5. Виртуелна тастатура	9
1.4.6. Внатрешни GeoGebra прозорци. GeoGebra погледи	10
1.4.6.1. Алгебарски прозорец	13
1.4.6.2. Прозорци за графички приказ	15
1.4.6.3. CAS прозорец	15
1.4.6.4. Табеларен приказ	16
1.4.6.5. Преференци	18
1.4.6.6. Чекори на конструкцијата (Construction Protocol)	21
1.4.7. GeoGebra перспективи	23
1.4.8. Лента за навигација	23
1.4.9. Листа од GeoGebra наредби. Автокомплетирање	24
1.5. Математички објекти, операции и функции	25
1.5.1. Листи од GeoGebra објекти	26
1.5.2. Имиња, ознаки и наслови на објекти	26
1.5.2.1. Неколку општи правила за именување. Резервирани ознаки	27
1.5.2.2. Реименување на објекти	29
1.5.2.3. Вредности (дефиниции), наслови и ознаки на објекти	29
1.5.3. Вградени математички операции, релации и функции	30
1.6. Видови GeoGebra документи	30
1.7. Дополнителни ресурси	31
1.8. Неколку напомени за користење на Практикумот	32
2. Матрици	33
2.1. Креирање перспектива за работа со матрици	33
2.2. Дефинирање на матрици во GeoGebra	34

2.2.1. Дефинирање на реални и комплексни матрици	35
2.2.2. Дефинирање на матрици што содржат општи променливи	40
2.2.3. Дефинирање на матрици што содржат параметри	41
2.3. Операции со матрици и наредби за матрици	48
2.3.1. Наредбите Dimension, Element и Length	48
2.3.2. Множење со број, збир, разлика и производ на матрици	49
2.3.3. Наредбата Transpose	53
2.3.4. Наредби за квадратни матрици. Матрични полиноми	55
2.3.5. Наредбите MatrixRank и ReducedRowEchelonForm	63
2.4. Неколку CAS специфични наредби за матрици	67
2.4.1. Наредбите CharacteristicPolynomial и MinimalPolynomial	67
2.4.2. Наредбите Eigenvalues и Eigenvectors	69
2.4.3. Наредбата JordanDiagonalization	72
3. Системи линеарни равенки	83
3.1. Дефинирање на линеарни равенки во GeoGebra	83
3.2. Графичко решавање на системи линеарни равенки	84
3.2.1. Графичко решавање на 2x2-системи	85
3.2.2. Графичко решавање на 3x3-системи	88
3.3. Наредбите Solve и Solutions за системи равенки	97
3.4. Алатката Solve	107
3.5. Решавање на $m \times n$ -системи со помош на матрици	108
4. Реални функции	115
4.1. Дефинирање на реални функции во GeoGebra	115
4.2. Графички приказ на дефинициона област	125
4.3. Операции со функции и композиции на функции	131
4.4. Инверзна функција	138
4.5. Графичко претставување на област на менување	148
4.6. Анимирање графици	151
4.7. Определување нули на реални функции	155
4.7.1. Примена на наредбите Solve и Solutions	155
4.7.2. Примена на наредбите NSolve и NSolutions	159
4.7.3. Наредбите Root, Roots и PlotSolve	162
4.8. Наредба за определување локални екстреми	166
4.9. Наредба за определување превојни точки	171
4.10. Наредби за специфични класи функции	175
4.10.1. Дополнителни наредби за полиноми	175
4.10.2. Разложување на парцијални дробки	180
4.10.3. Дополнителни наредби за тригонометриски функции	181
4.11. Граници на реални функции	185

4.12. Отстранливи прекини	192
4.13. Асимптоти	195
5. Криви во рамнина	199
5.1. Исцртување имплицитно зададени криви	199
5.2. Исцртување криви зададени со параметарски равенки	204
5.3. Исцртување криви зададени со поларни равенки	212
5.3.1. Креирање поларен координатен систем	212
5.3.2. Дефинирање на точки зададени со поларни координати	213
5.3.3. Исцртување криви дадени со експлицитни поларни равенки	215
5.3.4. Исцртување криви дадени со имплицитни поларни равенки	226
6. Изводи	229
6.1. Изводи од експлицитно зададени функции	229
6.2. Изводи од имплицитно зададени функции	237
6.3. Изводи од параметарски зададени функции	241
6.3.1. Примена на наредбата <code>Derivative</code>	241
6.3.2. Примена на наредбата <code>ParametricDerivative</code>	244
6.3.3. Прв извод од параметарски зададени функции	245
6.3.4. Пресметување вредности за параметарски зададени функции	247
6.4. Изводи од повисок ред	248
6.4.1. Изводи од повисок ред за експлицитно зададени функции	248
6.4.2. Изводи од повисок ред за параметарски зададени функции	250
6.5. Примена на изводи	254
6.5.1. Тејлоров и Маклоренов полином	254
6.5.2. Равенки на тангента и нормала	257
6.5.3. Локални екстреми и интервали на монотоност	265
6.5.4. Превојни точки и интервали на закривеност	269
Додаток	273
Д.1. Вградени операции и функции во GeoGebra	273
Д.2. Неколку поважни кратенки	277
Литература	278



Ф И К Т

ISBN 978-608-5003-04-4

